Sistema líneal de tres ecuaciones con tres incógnitas y posición relativa de tres planos en el espacio

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$ cada ecuación es un plano en el espacio

Si el sistema es compatible pueden ocurrir 4 casos:

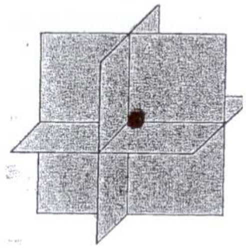


Figura 1
Los tres planos se cortan en un punto

1. rango (A) = rango (A*) =3 = nº de incógnitas. Sistema compatible determinado geométricamente significa que los tres planos se cortan en un punto.

Ejemplo: $$\begin{cases} 2x+7y+20z-1=0 \\ 2x+8y+23z-1=0 \\ x-2z-1=0 \end{cases}$$

El punto donde se cortan es la solución del sistema, en el ejemplo (x = 1/3, y = 1, z = -1/3)

2. rango (A) = rango (A*) =2 < nº de incógnitas.
Sistema compatible indeterminado
geométricamente significa que los tres planos se cortan en una recta..

Ejemplo: $$\begin{cases} x+7y+20z-1=0 \\ x+8y+23z-1=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$$

El sistema tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro.
Los tres planos se cortan en una recta
La ecuación de la recta es la solución $(x=1+\lambda,\ y=-3\lambda,\ z=\lambda)_{\lambda\in\Re}$

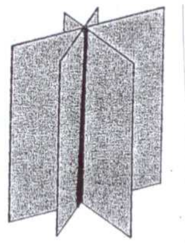


Figura 4
Los planos se cortan según una recta

3. rango (A) = rango (A*) =2 < nº de incógnitas. Sistema compatible indeterminado.
En este caso dos ecuaciones son la misma .
Geométricamente significa que dos planos son coincidentes y el otro los corta.

Ejemplo: $$\begin{cases} x+7y+20z-1=0 \\ 2x+14y+40z-2=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$$

La ecuación de la recta en la que se cortan los planos es la solución
$(x=1+\lambda,\ y=-3\lambda,\ z=\lambda)_{\lambda\in\Re}$

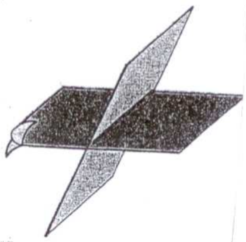
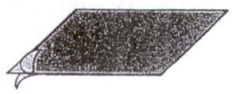


Figura 5
Dos de los planos son coincidentes

4. rango (A) = rango (A*) =1. El sistema es compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes dedos parámetros. Geométricamente significa que los tres planos son coincidentes

Ejemplo: $$\begin{cases} x+7y+20z-1=0 \\ 2x+14y+40z-2=0 \\ 3x+21y+60z-3=0 \end{cases}$$



La solución es el plano x + 7y +20z -1 = 0

Figura 8
Los tres planos

Si el sistema es incompatible pueden ocurrir 4 casos:

5. rango (A) =2, rango (A*) =3. Sistema incompatible geométricamente significa que los planos se cortan dos a dos..

$$\text{Ejemplo: } \begin{cases} -x+7y+20z-1=0 \\ -x+8y+23z-1=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$$

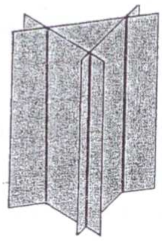


Figura 2
Los planos se cortan dos a dos

6. rango (A) =2; rango (A*) =3 . Sistema incompatible.

$$\text{Ejemplo: } \begin{cases} x+7y+20z-1=0 \\ 2x+14y+40z-1=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$$

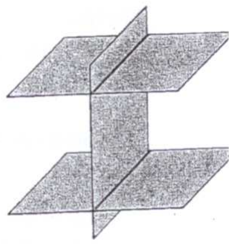


Figura 3
Dos son paralelos y el tercero los corta

Los dos primeros planos son paralelos (coeficientes de incógnitas proporcionales) y el tercero los corta

7. rango (A) = 1; rango (A*) =2. El sistema no tiene solución.

$$\text{Ejemplo: } \begin{cases} x+7y+20z-1=0 \\ 2x+14y+40z-4=0 \\ 3x+21y+60z+5=0 \end{cases}$$

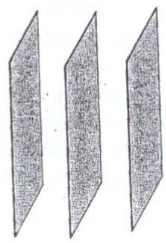


Figura 6
Los tres planos son paralelos

Los tres planos son paralelos (los tres tienen los coeficientes de las incógnitas proporcionales pero no los términos independientes).

8. rango (A) =1; rango (A*) =2. El sistema no tiene solución.

$$\text{Ejemplo: } \begin{cases} x+7y+20z-1=0 \\ 2x+14y+40z-2=0 \\ 3x+21y+60z+5=0 \end{cases}$$

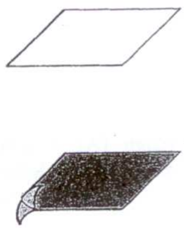


Figura 7
Dos planos coinciden y el otro es paralelo a ellos

Los dos primeros planos son coincidentes (los dos tienen proporcionales los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes) y el tercero es paralelo (tiene proporcionales los coeficientes de las incógnitas pero no los términos independientes)